ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS
Revista de investigación y experiencias didácticas
Núm. 30.3 (2012): 89-107
ISSN: 0212-4521

VALOR PRAGMÁTICO Y EPISTÉMICO DE TÉCNICAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS VERBALES ALGEBRAICOS EN AMBIENTE DE HOJA ELECTRÓNICA DE CÁLCULO

PRAGMATIC AND EPISTEMIC VALUE OF INSTRUMENTED TECHNIQUES IN SOLVING ALGEBRAIC WORD PROBLEMS IN AN ENVIRONMENT OF SPREADSHEET

Dra. Verónica Vargas-Alejo
División de Ciencias e Ingeniería, Universidad de Quintana Roo
Av. Boulevard Bahía s/n, Esq. Ignacio Comonfort. Col. Del Bosque, Chetumal, Quintana Roo, C.P. 77019
(vargasalejo@uqroo.mx)

Dr. José Guzmán-Hernández
Departamento de Matemática Educativa Cinvestav-IPN, México, DF. AV. IPN #2508, Col. San Pedro Zacatenco,CP. 07360
(jguzman@cinvestav.mx)

RESUMEN: La presente investigación documenta los valores pragmáticos y epistémicos de las técnicas que los alumnos de primer semestre de bachillerato utilizaron en su interacción con la hoja electrónica, y que guiaron la manera como la usan para resolver problemas algebraicos verbales de tasa. Se muestra cómo esa interacción de los estudiantes con el artefacto (Excel) posibilitó el surgimiento de nuevas técnicas, cada vez más sofisticadas, y de teoría, lo que les permitió explicar los resultados obtenidos al resolver problemas. El marco conceptual que sustenta esta investigación es conocido como Tarea-Técnica-Teoría (T-T-T) y fue propuesto por Artigue (2002). Los estudiantes trabajaron en parejas en la resolución de problemas, en un ambiente en el que se propició la exploración, la búsqueda de patrones y relaciones, la formulación de conjeturas y la generalización, formalización y justificación de argumentos. Nuestros resultados indican que el uso de la hoja electrónica propicia el desarrollo del razonamiento algebraico asociado con la generalización y la expresión de generalidades, usando lenguajes simbólicos cada vez más formales.

PALABRAS CLAVE: Problemas verbales de tasa, resolución de problemas, técnicas, aprendizaje del álgebra, valor pragmático y epistémico de la técnica.

ABSTRACT: This research documents the pragmatic and epistemic values of the techniques that students of first semester of high school used in the interaction with the spreadsheet, and that guided the way they utilized it to solve algebraic rate word problems. It shows how the students' interaction with the artifact (Excel) allowed the emergence of new techniques, increasingly sophisticated, and theory which enabled them to explain the results obtained when they solved the problems. The conceptual framework underpinning this research is known as Task-Technique-Theory (T-T-T) proposed by Artigue (2002). The students worked in pairs to solve problems in an environment that involved the exploration, finding patterns and relationships, making conjectures, generalization, formalization and justification of arguments. Our results indicate that the use of the spreadsheet facilitates the development of algebraic thinking associated with generalization and expression of that generality using increasingly symbolic languages.

KEY WORDS: Rate word problems, Problem solving, Techniques, Learning of algebra, pragmatic and epistemic values of the techniques.

Fecha de recepción: enero 2011 • Aceptado: junio 2011

Para citar: Vargas-Alejo, V. y Guzmán-Hernández, J. (2012). Valor pragmático y epistémico de técnicas en la resolución de problemas verbales algebraicos en ambiente de hoja electrónica de cálculo. *Enseñanza de las Ciencias*, 30(3), 89-107 pp

INTRODUCCIÓN

La tendencia actual en la conformación del currículo de matemáticas, en los distintos niveles educativos, es integrar las tecnologías de información y comunicación. En las clases de matemáticas, se espera que los maestros utilicen, por ejemplo, calculadoras, software de geometría dinámica y hojas electrónicas de cálculo (en adelante hoja electrónica o Excel). Desde hace algunos años hasta la actualidad, se han desarrollado investigaciones que destacan el potencial y las limitaciones de estas herramientas para propiciar aprendizajes de matemáticas en los estudiantes; por ejemplo, hay estudios que datan de los años ochenta (e.g., Capponi y Balacheff, 1989; Dettori, Garuti y Lemut, 2001; Mochón, Rojano y Ursini, 2000; Rojano y Sutherland, 1993; Tabach y Friedlander, 2004; y Tabach, Hershkowitz y Schwarz, 2006, entre otros). Sin embargo, en la mayoría de estos estudios se ignoran los aspectos técnicos de la herramienta y su relación con la adquisición de conceptos (Artigue, 2002). Es decir, no se profundiza, o a veces es ignorado, cómo el uso de herramientas para resolver tareas[1] puede apoyar el desarrollo de conocimiento en los estudiantes, tomando como base sus conocimientos previos.

En este artículo mostramos resultados, como los recogidos por la literatura (*e.g.*, Ainley, Bills y Wilson, 2005; Haspekian, 2005; Rojano y Sutherland, 1993; Sutherland y Rojano, 1993), en torno a procedimientos que muestran la hoja electrónica de cálculo como una herramienta que posibilita el aprendizaje del álgebra (*e.g.*, la escritura de «objetos simbólicos» como = *A2 * B2*); además, a diferencia de otros trabajos de investigación relacionados con el tema, aquí se muestra la evolución de las técnicas usadas para resolver problemas de una pareja de estudiantes de bachillerato, desde un uso de la hoja electrónica como *tabla de valores* hasta el inicio de la simbolización del sistema de ecuaciones que representa el problema. Discutimos el valor pragmático y epistémico de las técnicas que posibilitan la comprensión y el uso de conceptos matemáticos como variable, incógnita y ecuación, involucrados en la solución de los problemas propuestos. En particular, se muestra cómo algunas de las técnicas usadas por los estudiantes están relacionadas con formas de razonamiento algebraico, como la generalización y expresión de esa generalidad mediante lenguajes simbólicos cada vez más formales. En este artículo pretendemos dar respuesta a las siguientes preguntas de investigación:

a) ¿Qué técnicas emergen y evolucionan en la resolución de problemas algebraicos de tasa mediante el uso de la hoja electrónica?
b) ¿Cuáles de ellas deben ser fomentadas, por su utilidad en la resolución de problemas, para propiciar formas de razonamiento algebraico en estudiantes de bachillerato?

MARCO CONCEPTUAL

Antecedentes

Aproximación instrumental

La comunidad científica acepta que los marcos teóricos y conceptuales evolucionan constantemente en cualquier disciplina. La educación matemática no es la excepción, pues con frecuencia, los marcos ya establecidos y reconocidos por la comunidad no logran explicar ciertos resultados obtenidos al llevar a cabo alguna investigación con nuevos objetos disponibles en el campo (Artigue, 2004). El uso de herramientas tecnológicas en los procesos de enseñanza y de aprendizaje condujo a pensar en nuevos marcos que pudieran explicar la relación entre el sujeto, el objeto de conocimiento y las he-

1. En este documento tarea y problema son usados como sinónimos.

rramientas utilizadas para acercarnos a ese objeto. Uno los primeros trabajos que marcaron la pauta en esta dirección teórica fue el de Verillon y Rabardel (1995) y el de Rabardel (1995), conocido en el medio como *Aproximación ergonómica*.

En estos dos trabajos pioneros, apoyados en la ergonomía cognitiva, se distinguen dos conceptos relacionados con el uso de las herramientas tecnológicas para resolver alguna tarea: los *artefactos* y los *instrumentos*. En la aproximación ergonómica, los *artefactos* pueden ser materiales o simbólicos y estar producidos con fines sociales, mientras que los *instrumentos* involucran tanto a los objetos físicos o simbólicos (artefactos) como a los esquemas de utilización que resultan de la construcción propia o de la apropiación de esquemas sociales existentes (Rabardel, 1995: 11). Drijvers y Trouche (2008: 368) simbolizan este proceso como:

Instrumento = artefacto + esquema

La explicación acerca de cómo el sujeto transforma el artefacto en instrumento se da bajo el concepto de génesis instrumental. Esta génesis involucra dos procesos dinámicos y dialécticos entre sí: la instrumentalización y la instrumentación. El primero está orientado del sujeto al artefacto: el usuario selecciona los comandos que se han de utilizar, los reagrupa, pone énfasis en la producción e institución de sus funciones, de sus desvíos o limitaciones, de la atribución de sus propiedades, transforma el artefacto, su estructura y su funcionamiento, etc. (Rabardel: 12). Por su parte, la instrumentación es relativa al sujeto, es decir, mediante el uso de artefactos se da el surgimiento y la evolución de los esquemas de utilización y de acción instrumentada (Rabardel: 12).

Teoría antropológica de lo didáctico (TAD)

Chevallard (1999) articula su propuesta antropológica en cuatro niveles en términos de trabajo, que puede ser realizado en una obra, perteneciente a una institución. Tales niveles son: las tareas, las técnicas, la tecnología y la teoría. Los cuatro constituyen una praxeología.

Tipos de tareas: la TAD sitúa la actividad matemática en el conjunto de actividades humanas y de las instituciones sociales (Chevallard, 1999: 223). En cuanto a la actividad humana, la palabra *praxeolog*ía se apoya en el hecho de que todo conocimiento surge a partir de la práctica. En las praxeologías están situados conceptos básicos de la TAD; dos de estos son: las tareas (t) y los tipos de tareas (T). Chevallard (ibíd.) argumenta que las tareas, en general, son dadas en términos de verbos; por ejemplo: *a*) *reduce* una expresión algebraica; *b*) *calcula* el valor de una expresión simbólica, en un valor dado, etc.

Técnicas: de acuerdo con Chevallard, las técnicas son *una manera de llevar a cabo, de realizar o de resolver* una tarea (p. 225). Este autor agrega que las técnicas no son necesariamente de tipo algorítmico o cuasi algorítmico, y lo serán solo en casos muy excepcionales. En tareas como *axiomatizar* el dominio de las matemáticas o *pintar* un paisaje, entre otras, no existe un algoritmo para llevarlas a cabo (p. 225). Sin embargo, es frecuente, al menos en la enseñanza de las matemáticas, tratar de *algoritmizar* las técnicas utilizadas para resolver ciertas tareas, por ejemplo: aritméticas, algebraicas, geométricas, etc.

Tecnologías: de acuerdo con Chevallard, las tecnologías son los *discursos racionales* sobre las técnicas. Tales discursos racionales tienen tres funciones principales: *a*) *Justificar* de manera racional la técnica, y asegurarnos de que, en efecto, tal técnica permite llevar a cabo la tarea en cuestión; *b*) *explicar* de manera inteligible y de esclarecer la técnica. Es decir, exponer el porqué tal técnica funciona para resolver o llevar a cabo una tarea, y *c*) *producir* nuevas técnicas (pp. 226-227). En matemáticas, la función de *justificación* de la tecnología es predominante, por la vía de la *demostración*, sobre la función de *explicación* de la técnica. La definición de tecnología dada por Chevallard es distinta de la aceptada comúnmente.

Teorías: de acuerdo con Chevallard, las teorías tratan de un nivel superior de justificación- explicación-producción, las cuales retoman el discurso tecnológico que justifica el uso de las técnicas que permiten llevar a cabo una tarea. En su teoría, Chevallard distingue dos bloques importantes, relacionados con praxeologías puntuales, a saber: *a*) *el práctico-técnico* y *b*) *el tecnológico-teórico*. El primero de ellos hace referencia al tipo de tarea y la técnica que permite resolverla; mientras que el segundo está relacionado con la teoría que explica el uso de la técnica (tecnología) y la teoría general que apoya esa tecnología (tecnología de la tecnología).

Los dos enfoques teóricos precedentes dieron origen a la aproximación teórica: Tarea-Técnica- Teoría (T-T-T), que tratamos brevemente a continuación.

Tarea-Técnica-Teoría (T-T-T)

De acuerdo con Artigue (2002), existían problemáticas, referentes al uso de artefactos para resolver tareas, que no lograban ser explicadas con el enfoque ergonómico, por ejemplo, las bondades atribuidas a la génesis instrumental. Más en concreto, Artigue (ibíd.) se refiere a: *i*) la complejidad inesperada de la génesis instrumental; es decir, cómo explicar la transformación de artefacto a instrumento, en términos de los esquemas de utilización y de acción instrumentada, a pesar de aceptar que los esquemas son *visibles* a través de las acciones de los sujetos sobre los objetos matemáticos puestos en juego en una tarea determinada; *ii*) la necesidad matemática de la instrumentación; *iii*) el estatus de las técnicas instrumentadas: los problemas surgen al conectarlos con técnicas en ambientes de lápiz y papel, y su manejo institucional (p. 252).

En la teoría propuesta por Artigue (2002), y conocida en el medio como Tarea-Técnica-Teoría (T-T-T), las componentes tecnológicas y teóricas propuestas por Chevallard (1999) constituyen la teoría. La tarea es aceptada en el mismo sentido de Chevallard, al igual que la técnica. Sin embargo, se resalta el valor pragmático y epistémico de las técnicas. El valor pragmático de la técnica concierne al potencial productivo de ésta, mientras que su valor epistémico contribuye a comprender los objetos matemáticos involucrados al resolver tareas en ambientes de papel y lápiz y tecnológicos. Para ejemplificar la complejidad inesperada de la génesis instrumental, Artigue (2002) cita los trabajos de Guin y Trouche (1999) y Defouad (2000).

Guin y Trouche (1999) describen cinco perfiles de los estudiantes asociados con sus esquemas de acción instrumentada al resolver tareas, usando calculadora gráfica y simbólica para resolver una tarea sobre límite. Tales perfiles están vinculados al uso que ellos hacen de la calculadora, atendiendo a los recursos utilizados, al metaconocimiento que tiende a activarlos y a los modos de validación privilegiados. Estos perfiles son: aleatorio, mecanicista, experimentalista, racionalista y teórico. De acuerdo con sus perfiles, los estudiantes desarrollan diferentes relaciones con sus calculadoras gráficas y simbólicas. Sobre estos perfiles, el lector interesado puede encontrar información en Guin y Trouche (1999: 214-216).

Defouad (2000) reporta el estudio con nueve estudiantes de grado 11. Sus observaciones en clase fueron sobre el tema de la «variación de funciones», usando TI-92; este autor identifica diversas fases de la instrumentación de la variación: *a*) primera, los estudiantes permanecen fuertemente «atados» a la cultura del estudio de funciones a la que ya han sido introducidos en grado 10, con calculadoras gráficas; *b*) segunda, el cálculo de valores de la función y de su derivada, o de límites; verificación de resultados gráficos, lo llevan a cabo usando HOME; *c*) tercera, en cuanto a la fase de cálculo, la aplicación simbólica se convierte en herramienta predominante en los procesos de solución, junto al trabajo en ambientes de papel y lápiz, mientras que la aplicación gráfica es tomada principalmente como herramienta heurística de anticipación y de control (pp. 255-256). El lector interesado puede consultar la información sobre la necesidad matemática de la instrumentación y el estatus de las técnicas instrumentadas en Artigue (2002).

METODOLOGÍA

Participantes

La escuela en la que se llevó a cabo este estudio es un centro de bachillerato. Participaron 18 estudiantes[2] (de 15 años de promedio) durante un semestre (de agosto a diciembre), correspondiente a su curso de Álgebra. Es decir, este estudio se desarrolló durante las clases del curso normal de álgebra de los estudiantes del primer semestre de bachillerato; por lo tanto, sus antecedentes académicos fueron las Matemáticas de secundaria. Los alumnos manifestaron no tener experiencia previa en la resolución de problemas ni en el uso de la hoja electrónica. La duración de las sesiones de trabajo fue en promedio de una hora y media cada una, una sesión por semana. Los estudiantes trabajaron en parejas usando la hoja electrónica.

Acopio de datos

El trabajo en el aula de Cómputo, en general, fue de la siguiente manera: entrega del problema a cada pareja y lectura de éste por la propia pareja; resolución del problema en pareja con el uso de la hoja electrónica; discusión e interacción grupal, y conclusiones. El trabajo en el aula se basó en la participación activa por parte de los estudiantes.

El papel de la investigadora consistió en propiciar un ambiente en el salón de clases en el que las parejas de estudiantes fueran alentadas a explorar, formular y validar hipótesis relacionadas con los problemas, con expresar y discutir ideas, con tomar decisiones y evaluar sus avances en los procesos de solución. La investigadora interactuó con las parejas de estudiantes, mientras que estas resolvían los problemas por medio de preguntas que les permitieran reflexionar en torno al problema y su procedimiento de solución. Generó las interacciones y discusiones grupales, pidiendo a las parejas que presentaran sus resultados y con preguntas como: «¿De qué trata el problema?», «¿Cuáles son las incógnitas?» o «¿Qué relación hay entre estas cantidades?». Todas las sesiones de trabajo fueron audio- y videograbadas.

Los datos para el estudio se obtuvieron de diferentes fuentes: registros (papel y lápiz), archivos de Excel o audiograbaciones del trabajo de las parejas; filmaciones del grupo y parejas, y registro de observaciones de la investigadora y entrevistas. En este artículo no se incorporan datos obtenidos de las entrevistas.

Tipos de problemas

Los problemas fueron de *tasa*, pues se considera que juegan un papel importante en el surgimiento del pensamiento algebraico en los estudiantes dentro del contexto de resolución de problemas y en la articulación entre incógnita y variable en el aprendizaje del álgebra (Guzmán, Bednarz & Hitt, 2003). Este tipo de problemas es importante porque en ellos se establecen relaciones entre cantidades no homogéneas (*e.g.*, tiempo y dinero, precio y número de artículos, entre otros), lo que de acuerdo con Vergnaud (1996, p. 221) muestra que el análisis de las estructuras multiplicativas es totalmente diferente a las estructuras aditivas, e implica el análisis de relaciones cuaternarias entre cantidades no homogéneas.

En este artículo, por limitaciones de espacio, se discuten solo tres de los problemas (problemas 2, 3 y 4) implementados en el aula.

2. Las palabras *alumnos* y *estudiantes* son usadas como sinónimas en este documento.

Problema 2. Judith y Carolina están planeando ir a Europa. Las dos amigas están ahorrando dinero para su viaje. Judith tiene en este momento \$5000.00 en el banco y espera depositar \$200.00 cada semana. Carolina tiene únicamente \$2000.00, pero quiere depositar \$400.00 también cada semana. ¿En cuánto tiempo tendrán la misma cantidad de dinero?

Este problema puede ser resuelto mediante la siguiente ecuación:

$$5000 + 200x = 2000 + 400x \tag{1}$$

También puede abordarse utilizando una hoja electrónica, como a continuación se muestra (tabla 1).

Tabla 1.
Un procedimiento para resolver el problema 2

B2 fx =5000+200*A2

	A	B	C
1	semana	Judith	Carolina
2	1	5200	2400
3	2	5400	2800
4	3	5600	3200
5	4	5800	3600
6	5	6000	4000
7	6	6200	4400
8	7	6400	4800
9	8	6600	5200
10	9	6800	5600
11	10	7000	6000
12	11	7200	6400
13	12	7400	6800
14	13	7600	7200
15	14	7800	7600
16	15	8000	8000
17	16	8200	8400

Problema 3. Para la presentación de una obra de teatro se venden boletos de preventa a 40 y a \$50 el día del espectáculo. Si entraron 480 personas al teatro y se obtuvieron \$21000, ¿cuántas personas compraron boleto de preventa y cuántas compraron el día del espectáculo? (Martínez, Struck, Palmas & Álvarez, 2001: 149).

El problema 3 puede ser resuelto mediante el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} 40x + 50y = 2100 \\ x + y = 480 \end{cases} \tag{2}$$

También puede ser abordado utilizando hoja electrónica, como mostramos en la tabla 2.

Tabla 2.
Un procedimiento para abordar el problema 3

C2 =40*A2

	A	B	C	D	E
1	Can bol prev	Cant bol esp	ingreso prev	ingreso esp	total ingreso
2	240	240	9600	12000	21600
3	260	220	10400	11000	21400
4	280	200	11200	10000	21200
5	300	180	12000	9000	21000

Problema 4. Juan compró 450 cuadernos y 300 plumones y gastó $6600. Si cada cuaderno le costó el doble de cada plumón, ¿cuánto le costó cada cuaderno y cada plumón? (Martínez, Struck, Palmas & Álvarez, 2001: 149).

Este problema puede ser resuelto mediante el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} 450x + 300y = 6600 \\ x = 2y \end{cases} \tag{3}$$

Una de las formas de abordar el problema 4, utilizando la hoja electrónica, se muestra a continuación.

Tabla 3.
Un procedimiento para resolver el problema 4

E2 =A2*B2+C2*D2

	A	B	C	D	E
1	Cant cuad	costo cuad	cant plum	costo plum	gasto total
2	450	4	300	2	2400
3	450	8	300	4	4800
4	450	10	300	5	6000
5	450	11	300	5.5	6600

ANÁLISIS DE DATOS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Técnicas de los estudiantes para resolver problemas

Las tablas 1, 2 y 3 son ejemplos del tipo de técnica que se esperaba surgiera en las parejas de estudiantes al final de todo el proceso de investigación. La literatura de investigación sobre la temática aquí discutida (*e.g.*, Caponi & Balacheff, 1989: 190) reconoce esta técnica, con ciertos matices, como la *relación entre celdas de la misma fila, tomando una columna o varias de ellas como variables*. Esta técnica fue usada por algunas parejas de estudiantes durante el proceso de resolución de problemas. Sin embargo, no fue la única, también surgieron otras conforme los estudiantes interactuaban con el artefacto. Tales técnicas fueron clasificadas de acuerdo con las formas de uso del artefacto: tabla de valores, calculadora, fórmulas recursivas, ensayo numérico sistematizado y celda como variable.

En la literatura de investigación (Ainley, Bills & Wilson, 2005; Friedlander, 1999; Haspekian, 2005; Sutherland & Rojano, 1993; Rojano & Sutherland, 1993) también se reconocen técnicas como: fórmulas recursivas y celda como variable; no se reconocen técnicas como: ensayo numérico sistematizado, tabla de valores y calculadora, que surgieron en este estudio.

En seguida son descritas, de manera sucinta, las técnicas antes mencionadas:

- *Ensayo numérico sistematizado*. Los alumnos identifican la o las incógnitas del problema, así como las cantidades conocidas y las relaciones establecidas entre estas. Asignan valores iniciales para las cantidades desconocidas del problema y operan con ellas, buscando confirmar que estas cantidades cumplan con las relaciones identificadas.
- *Tabla de valores*. Los estudiantes utilizan la hoja electrónica para construir tablas de valores sin escribir fórmulas explícitas, se guían por los datos, las incógnitas y la variación de cantidades. Es un trabajo similar al de papel y lápiz.
- *Calculadora*. Los alumnos usan la hoja electrónica para identificar la o las incógnitas del problema, así como las cantidades conocidas y las relaciones establecidas entre estas. No escriben fórmulas que relacionen celdas entre sí o puedan ser *arrastradas*, sino que escriben expresiones aritméticas, por ejemplo, = 300 + 800. Utilizan cualquier celda para escribir las expresiones aritméticas o estas son ordenadas en columnas.
- *Fórmulas recursivas*. Los estudiantes escriben fórmulas recursivas e identifican que en las columnas de la tabla aparecen sucesiones numéricas, cuyo comportamiento se rige por cierto patrón, el cual escriben mediante fórmulas recursivas. El primer dato de la columna es tomado como el valor inicial y lo utilizan para generar el siguiente valor. Generan términos sucesivos en una columna añadiendo *d*, la constante de diferencia, a cada valor de las celdas de la columna.
- *Relación entre celdas de la misma fila, tomando una columna o varias de ellas como variables*.[3] Los estudiantes identifican en la hoja electrónica relaciones entre datos de diferentes columnas y escriben fórmulas, que relacionan celdas de distintas columnas y misma fila. Posteriormente, las *arrastran* a lo largo de las columnas. Los alumnos organizan la información de tal manera que logran manipular celdas referentes de manera general (todos los valores *p* se pueden meter en una columna).
- *Celda como variable*. Los estudiantes organizan la información en filas, de modo que no les posibilita *arrastrar* fórmulas en su hoja electrónica, sino que la usan como contenedoras de *números*. En ellas introducen varios valores, que están relacionados con otros datos mediante fórmulas, las cuales generan valores y permiten resolver el problema.

Las técnicas fueron emergiendo de acuerdo con el grado de conocimiento de la herramienta y la comprensión de conceptos matemáticos como variable, incógnita y ecuación. Las primeras que emergieron fueron: *tabla de valores*, *calculadora*, *fórmulas recursivas* y *ensayo numérico sistematizado*. Técnicas como *tabla de valores*, *calculadora* y *ensayo numérico sistematizado* dejaron de ser usadas por los estudiantes (valor pragmático de la técnica) al interactuar con el artefacto y los problemas. Esta interacción les permitió hacer uso de técnicas cada vez más sofisticadas (valor epistémico) en la solución de los problemas.

Por otra parte, estas técnicas pueden relacionarse con los perfiles *mecanicista*, *aleatorio*, *experimentalista*, *racionalista* y *teórico* de Guin y Trouche (1999: 214-216), en tanto que están vinculadas

3. El nombre de *Relación entre celdas de la misma fila, tomando una columna o varias de ellas como variables* fue elegido con el propósito de distinguir esta técnica de *Celda como variable*, donde también es establecida una relación funcional. La diferencia se establece en términos del arrastre o no de fórmulas y del tipo de manipulación de la celda referente.

con el uso que los estudiantes hicieron de la hoja electrónica, atendiendo a los recursos utilizados, al metaconocimiento que tiende a activarlos y a los modos de validación privilegiados.

Por ejemplo, las técnicas *ensayo numérico sistematizado* y *fórmulas recursivas* pueden asociarse con el perfil *experimentalista*, pues los alumnos llevan a cabo una exploración de fuentes de información disponibles. Identifican la o las incógnitas del problema, asignan valores a las cantidades desconocidas del problema y operan con ellas, buscando confirmar que estas cantidades cumplen con las relaciones identificadas. Los estudiantes hacen uso de su conocimiento en cuanto a lo que implica resolver un problema matemático: deben identificar la o las incógnitas del problema, así como las cantidades conocidas y las relaciones establecidas entre estas. Su razonamiento se basa en la comparación y confrontación de la información dada en el problema, las relaciones establecidas y su conocimiento con un grado promedio de los procesos de los comandos usados.

La técnica de la *calculadora* puede asociarse con el perfil *mecanicista*, ya que los alumnos basan su razonamiento en la acumulación de resultados dados por la máquina. Los alumnos usan la hoja electrónica para plasmar la o las incógnitas del problema identificadas, así como las cantidades conocidas y las relaciones establecidas entre estas. No escriben fórmulas que relacionen celdas entre sí o puedan ser *arrastradas*, sino que escriben expresiones aritméticas (operaciones), por ejemplo, = 300 + 800. Utilizan cualquier celda para escribir las expresiones aritméticas, o bien estas son ordenadas en columnas. Esta técnica también se relaciona con el perfil *aleatorio*, debido a que sus procedimientos de solución se apoyan en ensayo y error; con poca comprensión del potencial de la herramienta y sin verificar estrategias de los resultados obtenidos al usar la herramienta como calculadora. La tendencia de estos estudiantes es preguntar al profesor si es correcta su interpretación del problema y el procedimiento que se encuentran ejecutando.

La técnica *tabla de valores* puede asociarse con el perfil *racionalista*. Los estudiantes se caracterizan por reducir el uso de la hoja electrónica a una hoja de cuaderno; no escriben fórmulas explícitas, se guían por los datos, las incógnitas y la variación de cantidades. Su trabajo es similar al de papel y lápiz, como si tuvieran estos medios tradicionales. La especificad de su conducta es referida al papel importante de su razonamiento y de sus inferencias, los cuales no necesariamente los llevan a la solución del problema.

Las técnicas de *relación entre celdas de la misma fila, tomando una columna o varias de ellas como variables* y *celdas como variables* estarían asociadas con el perfil *teórico*, en tanto que se caracterizan por el uso de referencias matemáticas como fuente sistemática de información. Su razonamiento está basado esencialmente en analogías y en interpretaciones de hechos promedio con verificación de procedimientos dados por la herramienta tecnológica. Los estudiantes muestran un manejo mejor de la herramienta y justifican de manera teórica sus procedimientos.

Es importante mencionar que los estudiantes no hicieron uso del lápiz y papel durante sus procedimientos de solución, pues la actividad estaba enfocada al uso de la hoja electrónica exclusivamente, de ahí que algunos de los perfiles que Guin y Trouche señalan en su documento adquieran su propio matiz en este estudio.

Similar al trabajo de Defouad (2000, citado en Artigue, 2002), en este estudio pudimos identificar varias fases o etapas durante el surgimiento y uso de las técnicas, así como su influencia en la evolución del razonamiento algebraico de los estudiantes. Estas fases fueron determinadas por el valor pragmático y epistémico de las técnicas. La primera de las etapas estuvo influenciada por la cultura previa de resolución de problemas en ambiente de lápiz y papel y la falta de conocimiento de la herramienta; la segunda, por el aporte y contribución del artefacto como un medio para comprender y resolver los problemas, y la tercera por un uso sistematizado de la herramienta y el manejo de conceptos matemáticos como variable, incógnita y ecuación. Las etapas fueron las siguientes:

1. Primer uso de la herramienta: familiarización con el uso de esta.
2. Valor pragmático de las técnicas.
3. Uso de la herramienta en la solución de problemas: valor epistémico de las técnicas en el reconocimiento de patrones.

La primera etapa se ilustra con el problema 2. La segunda, con el problema 3, y la tercera con el problema 4. Estas etapas son descritas mediante las técnicas que emergieron en el aula al resolver los problemas mencionados (2, 3 y 4); en particular, se toma como ejemplo el trabajo de una pareja de estudiantes (Alex y Fidel), que se sigue a lo largo de las tres etapas. Se menciona de manera general el desempeño de todo el grupo, como un contexto en el cual se desenvolvió la pareja de estudiantes.

Primer uso de la herramienta: familiarización con el uso de esta

En la primera etapa emergieron técnicas a las cuales se les dio seguimiento durante el estudio, aunque no tenían relación con formas de razonamiento como: generalización y formalización. Las técnicas que surgieron (mostradas por siete parejas de nueve) en esta primera etapa fueron, principalmente, *la tabla de valores y la calculadora*.

Tabla de valores y calculadora

La pareja de estudiantes Alex y Fidel resolvió el problema 2 de la siguiente manera (tabla 4).

Tabla 4.
Técnica para resolver el problema 2. No hay ninguna fórmula.
Los cálculos se realizaron de manera mental y se insertaron
solo cantidades en las celdas

E10 fx 6800

	A	B	C	D	E
1	cantidad	cantidad	semanas		
2	5000	2000	1	2400	5200
3	deposito semanal	deposito semanal	2	2800	5400
4	200	400	3	3200	5600
5			4	3600	5800
6			5	4000	6000
7			6	4400	6200
8			7	4800	6400
9			8	5200	6600
10			9	5600	6800
11			10	6000	7000
12			11	6400	7200
13			12	6800	7400
14			13	7200	7600
15			14	7600	7800
16			15	8000	8000
17			16	8400	8200

La técnica asociada con la solución del problema de esta pareja de estudiantes tiene influencia de la cultura del ambiente de resolución de problemas en lápiz y papel a la que ya habían sido introducidos en grados escolares anteriores; la forma en que construyeron la tabla de valores así lo evidencia. Resolver el problema 2 fue el foco de atención, pero la forma de usar la herramienta para hacerlo era desconocida.

La técnica de solución del problema (tabla 4) fue llevada a discusión grupal por la investigadora, en la que Alex dictó la organización de los datos que tenía en su hoja electrónica, y la investigadora capturó la información (tabla 5). Alex explicó las cantidades escritas en las columnas C, D y E, pero la investigadora, en lugar de capturar todas las cantidades, llevó a discusión grupal cómo podrían ser desplegadas mediante la escritura de fórmulas cuyo *arrastre* las generara de forma rápida. Para ello, una de las preguntas que planteó fue la siguiente:

¿Con qué fórmula puedo calcular lo que ella semanalmente está ahorrando? [*Se refería a Carolina*]

La fórmula que propusieron fue del tipo = $B10 + B12$ (tabla 5) y propusieron *arrastrarla*. El objetivo de los alumnos al dar esta fórmula era generar un proceso recursivo, pero no obtuvieron la secuencia de cantidades buscada: 2400, 2800, 3200, etc. Esto condujo a que la discusión continuara y los estudiantes trataran de acomodar la información y la fórmula para obtener lo esperado. La investigadora agregó una columna extra (a sugerencia de los estudiantes) para la cantidad de 400 que se depositaba semana a semana, y con base en las aportaciones de los estudiantes como la anterior y en forma de expresiones aritméticas (como = 2400 + 400) introdujo fórmulas que sintetizaban las relaciones involucradas en el problema e incluyó una nueva columna de datos.

Tabla 5.
Técnica[4] para resolver el problema 2

D25 fx =2000+C25*E25

	A	B	C	D	E	F
7						
8	JUDITH	CAROLINA				
9	CANTIDAD	CANTIDAD	SEMANAS	CAROLINA	AHORRO	JUDITH
10	5000	2000				
11	DEPOSITO SEMANAL	DEPOSITO SEMANAL	1	2400	400	5200
12	200	400	2	2800	400	5400
13			3	3200	400	5600
14			4	3600	400	5800
15			5	4000	400	6000
16			6	4400	400	6200
17			7	4800	400	6400
18			8	5200	400	6600
19			9	5600	400	6800
20			10	6000	400	7000
21			11	6400	400	7200
22			12	6800	400	7400
23			13	7200	400	7600
24			14	7600	400	7800
25			15	8000	400	8000
26			16	8400	400	8200
27			17	8800	400	8400
28			18	9200	400	8600
29			19	9600	400	8800

D25 fx =2000+C25*E25

	A	B	C	D	E	F
7						
8	JUDITH	CAROLINA				
9	CANTIDAD	CANTIDAD	SEMANAS	CAROLINA	AHORRO	JUDITH
10	5000	2000				
11	DEPOSITO SEMANAL	DEPOSITO SEMANAL	1	=2000+C11*E11	400	=5000+200*C11
12	200	400	=C11+1	=2000+C12*E12	400	=5000+200*C12
13			=C12+1	=2000+C13*E13	400	=5000+200*C13
14			=C13+1	=2000+C14*E14	400	=5000+200*C14
15			=C14+1	=2000+C15*E15	400	=5000+200*C15
16			=C15+1	=2000+C16*E16	400	=5000+200*C16
17			=C16+1	=2000+C17*E17	400	=5000+200*C17
18			=C17+1	=2000+C18*E18	400	=5000+200*C18
19			=C18+1	=2000+C19*E19	400	=5000+200*C19
20			=C19+1	=2000+C20*E20	400	=5000+200*C20
21			=C20+1	=2000+C21*E21	400	=5000+200*C21
22			=C21+1	=2000+C22*E22	400	=5000+200*C22
23			=C22+1	=2000+C23*E23	400	=5000+200*C23
24			=C23+1	=2000+C24*E24	400	=5000+200*C24
25			=C24+1	=2000+C25*E25	400	=5000+200*C25
26			=C25+1	=2000+C26*E26	400	=5000+200*C26
27			=C26+1	=2000+C27*E27	400	=5000+200*C27
28			=C27+1	=2000+C28*E28	400	=5000+200*C28
29			=C28+1	=2000+C29*E29	400	=5000+200*C29

La interacción grupal relacionada con la forma de resolver este problema terminó con la petición de la investigadora de tratar de resolver los demás problemas, usando el potencial de la herramienta como la escritura de fórmulas para explicitar las relaciones entre los datos e incógnitas una vez identificados en el problema y haber efectuado de manera rápida los cálculos. Esto no fue sencillo para las parejas de estudiantes, pues el carácter epistémico de las técnicas no es inmediato que surja y evolucione en ellos.

Durante esta primera etapa, en la resolución de otros problemas, la pareja de estudiantes Alex y Fidel estuvo escribiendo expresiones aritméticas para resolver los problemas como = 35100 – 600 * 6; es decir, usaron la técnica *calculadora*. También escribieron fórmulas recursivas (ejemplo, = $B3 + B2$), que *arrastraron* para generar secuencias de números. En varias ocasiones escribieron expresiones aritméticas como un primer paso que les permitiera la comprensión del problema y las relaciones involucradas en éste antes de escribir fórmulas.

4. Se incorporan dos tablas, la primera señala los valores con los cuales interactuaron los estudiantes y la segunda muestra las fórmulas utilizadas para generar los valores de la primera tabla. Lo mismo ocurre en tablas posteriores.

Valor pragmático de las técnicas

La segunda etapa de la investigación se caracteriza porque los estudiantes empezaron a modificar sus técnicas *tablas de valores y calculadora*, debido a la complejidad de las tareas que estaban resolviendo, y comenzaron a comprender que el objetivo de utilizar la hoja electrónica era resolver los problemas mediante procedimientos en los que se explicitaran con fórmulas las relaciones entre los datos e incógnitas y no procedimientos en los cuales se requiriera hacer operaciones, como si se tuviera una calculadora. El trabajo de Alex y Fidel en esta etapa se ilustra con la siguiente técnica utilizada para resolver el problema 3.

Celda como variable

La pareja de Alex y Fidel resolvió el problema 3 de la siguiente manera (tabla 6). En las celdas *A*2, *B*2 y *B*3 escribieron los datos: 480 (cantidad de personas que entraron al teatro), 40 (coste de los boletos en preventa) y 50 (coste de los boletos el día del espectáculo). Las celdas *C*2 y *C*3 corresponden a las incógnitas del problema (cantidad de personas que compraron boletos de preventa el día del espectáculo). Relacionaron estas celdas con *B*2 y *B*3 para obtener la cantidad de dinero recaudada por la venta de los boletos, mediante fórmulas que escribieron en *D*2 y *D*3. En *D*2 escribieron la fórmula = *C*2 * *B*2, es decir, multiplicaron la cantidad de personas que compraron boletos en preventa (correspondiente a la cantidad de boletos vendidos en preventa) y el coste del boleto. En *D*3 escribieron la fórmula = *C*3 * *B*3, es decir, multiplicaron la cantidad de personas que compraron boletos el día del espectáculo (correspondiente a la cantidad de boletos vendidos ese día) y el coste del boleto. En *D*4 sumaron el ingreso por la preventa (celda *D*2) y la venta el día del espectáculo (celda *D*3). Alex y Fidel sabían que debían obtener 21000, como ingreso total por la venta de boletos.

Alex y Fidel variaban las cantidades numéricas en las celdas *C*2 y *C*3: «Mira, con 240 me pasé con 600». Cuando lo hacían observaban el resultado obtenido en la celda *D*4 (tabla 6). Esta forma de organizar la información y proceder no les permitió, desde el inicio, encontrar rápidamente los resultados, debido a que no quedaba un registro de lo que estaba ocurriendo en *D*2 y *D*3 cada vez que variaban las cantidades *C*2 y *C*3. No relacionaron mediante fórmulas *C*2 y *C*3, de tal manera que al variar la cantidad en la celda *C*2 fuera modificada de manera automática la cantidad de la celda *C*3. Lo que hicieron fue equilibrar las cantidades, es decir, si a una le restaban 10, a la otra se lo aumentaban, tratando de que ambas cantidades siguieran sumando 480. Todavía no había dominio de la hoja electrónica, aunque conceptualmente identificaban las variables, constantes y relaciones entre estas en el problema. Casi al final del proceso de solución, Fidel manifestó haber identificado que debía variar las cantidades en *C*2 y *C*3, de tal manera que la primera fuera mayor que la segunda. El siguiente extracto así lo evidencia.

Fidel: Multiplicando la mayor cantidad por 40 y la menor por 50 [*estaba explicando su procedimiento a su compañero Alex*].

En la fila seis (tabla 6) escribieron los resultados obtenidos.

Tabla 6.
Técnica de Alex y Fidel para resolver el problema 3

D2 =C2*B2

	A	B	C	D
1	*personas*	*precio de los boletos*	personas divididas	total de precio de los boletos divididos
2	*480*	*40*	**300**	**12000**
3		*50*	**180**	**9000**
4			**total**	**21000**
5	*preventa*	*dia del espectaculo*		
6	*300*	*180*		
7				

D11

	A	B	C	D
1	*personas*	*precio de los boletos*	personas divididas	total de precio de los boletos divididos
2	*480*	*40*	**300**	**=C2*B2**
3		*50*	**180**	**=C3*B3**
4			**total**	**=D2+D3**
5	*preventa*	*dia del espectaculo*		
6	*300*	*180*		
7				

Con esta técnica, Alex y Fidel mostraron el uso de las celdas como *contenedoras de números*. En ellas introducían varios valores, los cuales estaban conectados con otros datos mediante fórmulas para generar valores y resolver el problema.

Las técnicas como esta fueron aprovechadas por la investigadora para mostrar cómo las relaciones desplegadas en la hoja electrónica podían ser utilizadas para escribir el sistema de ecuaciones que representaba la solución del problema, y cómo las soluciones encontradas con la hoja electrónica satisfacían al sistema de ecuaciones lineales. No fueron resueltos sistemas de ecuaciones lineales en ambientes de lápiz y papel; solo fueron escritos a manera de conclusión de la discusión del problema resuelto.

Sin embargo, no todas las parejas de estudiantes se estaban desempeñando como Alex y Fidel, algunas parejas escribían solo fórmulas recursivas para resolver los problemas, las cuales luego arrastraban. Tal como se señala en la literatura de investigación (*e.g.*, Haspekian, 2005), independientemente de las discusiones grupales donde se mostraban diversos procedimientos, algunos de los cuales eran rescatados por la investigadora por su potencial para ciertos fines, la hoja electrónica estaba siendo usada por los estudiantes de diversas maneras, pero atendiendo al valor pragmático de ésta.

Uso de la herramienta en la solución de problemas: valor epistémico de las técnicas en el reconocimiento de patrones

La tercera etapa se caracteriza por que las técnicas de las parejas de estudiantes evolucionaron, mostrando un reconocimiento de patrones donde una o dos variables aparecían y estas se relacionaban con los datos mediante fórmulas (valor epistémico de las técnicas). El manejo de la herramienta que estaban haciendo los estudiantes en esta etapa posibilitó que se pudiera empezar a simbolizar en lápiz y papel los sistemas de ecuaciones lineales que representaban la solución de los dos problemas implementados en esta etapa del estudio. Como se mencionó al inicio de esta sección 4, esta etapa es ilustrada con el problema 4.

Relación entre celdas de la misma fila, tomando la columna como variable

La pareja de estudiantes (Alex y Fidel) procedió de la manera siguiente para resolver el problema. Después de leer el enunciado, empezó a vaciar la información en la hoja electrónica de cálculo (cuadernos, gasto, subtotal, plumones, gasto, subtotal y total. Tabla 7). Este vaciado de información parecía ser parte de la rutina de la resolución de problemas hasta el momento. Sin embargo, de manera simultánea, los estudiantes iban analizando la información dada en el problema: lo que tenían que buscar, es decir, las incógnitas (coste de cuadernos y plumones), las cantidades conocidas (cantidad de cuadernos, cantidad de plumones) y el gasto total hecho por Juan.

Tabla 7.
Técnica de Alex y Fidel

E7 f_x =E6+1

	A	B	C	D	E	F	G
1	CUADERNOS	GASTO	SUBTOTAL	PLUMONES	GASTO	SUBTOTAL	TOTAL
2	450	2	900	300	1	300	1200
3	450	3	1350	300	1.5	450	1800
4	450	5	2250	300	2.5	750	3000
5	450	7	3150	300	3.5	1050	4200
6	450	9	4050	300	4.5	1350	5400
7	450	11	4950	300	5.5	1650	6600
8	450	13	5850	300	6.5	1950	7800
9	450	15	6750	300	7.5	2250	9000
10	450	17	7650	300	8.5	2550	10200
11	450	19	8550	300	9.5	2850	11400
12	450	21	9450	300	10.5	3150	12600
13	450	23	10350	300	11.5	3450	13800
14	450	25	11250	300	12.5	3750	15000
15	450	27	12150	300	13.5	4050	16200
16	450	29	13050	300	14.5	4350	17400
17	450	31	13950	300	15.5	4650	18600
18	450	33	14850	300	16.5	4950	19800
19	450	35	15750	300	17.5	5250	21000
20	450	37	16650	300	18.5	5550	22200
21							
22							
23	CUADERNO		450(X)+300(Y)				
24	450		450(11)+300(5.5)				
25	PLUMONES		4950+1650				
26	300		6600				
27							
28		X=11					
29		Y=5.5					
30							

H9 f_x

	B	C	D	E	F	G
1	GASTO	SUBTOTAL	PLUMONES	GASTO	SUBTOTAL	TOTAL
2	2	=A2*B2	300	1	=E2*D2	=C2+F2
3	3	=B3*A3	300	=E2+0.5	=E3*D3	=C3+F3
4	=B3+2	=B4*A4	300	=E3+1	=E4*D4	=C4+F4
5	=B4+2	=B5*A5	300	=E4+1	=E5*D5	=C5+F5
6	=B5+2	=B6*A6	300	=E5+1	=E6*D6	=C6+F6
7	=B6+2	=B7*A7	300	=E6+1	=E7*D7	=C7+F7
8	=B7+2	=B8*A8	300	=E7+1	=E8*D8	=C8+F8
9	=B8+2	=B9*A9	300	=E8+1	=E9*D9	=C9+F9
10	=B9+2	=B10*A10	300	=E9+1	=E10*D10	=C10+F10
11	=B10+2	=B11*A11	300	=E10+1	=E11*D11	=C11+F11
12	=B11+2	=B12*A12	300	=E11+1	=E12*D12	=C12+F12
13	=B12+2	=B13*A13	300	=E12+1	=E13*D13	=C13+F13
14	=B13+2	=B14*A14	300	=E13+1	=E14*D14	=C14+F14
15	=B14+2	=B15*A15	300	=E14+1	=E15*D15	=C15+F15
16	=B15+2	=B16*A16	300	=E15+1	=E16*D16	=C16+F16
17	=B16+2	=B17*A17	300	=E16+1	=E17*D17	=C17+F17
18	=B17+2	=B18*A18	300	=E17+1	=E18*D18	=C18+F18
19	=B18+2	=B19*A19	300	=E18+1	=E19*D19	=C19+F19
20	=B19+2	=B20*A20	300	=E19+1	=E20*D20	=C20+F20
21						

Alex: « Uno, ¡a ver si sale! Tres, cuatro, cinco, seis, siete… Aquí es tres, aquí tiene que ser seis, ocho… [Estaba revisando las secuencias de números tanto en la columna B, *como en la E para ver si se mantenía la relación «doble»*] 2.300 , ¡no manches!
¡No es cierto!».

En seguida, Alex precisó su sugerencia, pues la anterior no le había quedado clara:

Alex: «Los plumones ¿sí tiene que cuestan el doble? ¿No?.. O es el doble…».
Fidel: «Sí».

La relación «cada cuaderno le costó el doble de cada plumón» fue tomada por ellos a la inversa, es decir, cuando consideraron que el coste de los cuadernos era 10, determinaron que el coste de los plumones era 20. Lo anterior se debió al orden que le dieron a las etiquetas «cuadernos y plumones» en la hoja electrónica, más que a una interpretación errónea del enunciado, ya que después de varios ensayos numéricos sin éxito retomaron el enunciado del problema 4. Lo leyeron de nuevo, buscando la relación entre cantidad de cuadernos y plumones, y se dieron cuenta de su error y lo corrigieron.

Las columnas B y E (tabla 7) fueron utilizadas por ellos como variables. En ellas representaron el coste de los cuadernos y el coste de los plumones. Sin embargo, no llegaron a explicitar la relación $B = 2E$ o $E = B / 2$, sino que escribieron fórmulas recursivas, tanto en la columna B (= $B3 + 2$) como en la columna E, las cuales fueron arrastradas. Esto repercutió, como se discute más adelante, en el momento de la simbolización. Aunque Alex y Fidel no escribieron la relación de comparación multiplicativa «el doble de» como una fórmula en la hoja de cálculo, esa relación está presente en las fórmulas recursivas que escribieron para las columnas, ya que lo que se suma en la columna B es el doble de lo que se suma en la columna E. Esto es patente, en particular, en el hecho de que en la columna E se suma 0,5 cuando en la columna B se ha pasado de 2 a 3 (es decir, se ha sumado 1).

La pareja de estudiantes terminó de resolver el problema, al encontrar que 11 y 5,5 (celdas $B7$ y $E7$) generaban 6.600 en la celda $G7$, dato del problema. En seguida, procedieron a simbolizar (filas 23-29, tabla 7), no sin tener dificultades, las cuales fueron discutidas con la investigadora, como se muestra a continuación.

Simbolización propiciada por el uso de la herramienta

Alex y Fidel, a sugerencia inicial de la investigadora, trataron de simbolizar las relaciones explícitas entre los datos y las incógnitas del problema.

Al principio, la pareja tuvo dificultades para determinar los significados de x e y. No estaba claro el significado de estos objetos simbólicos; de hecho, escribió $11x + 5{,}5y$, y explicó a la investigadora que x era 450 (cantidad de cuadernos) e y era 300 (cantidad de plumones). El significado atribuido a estos símbolos x e y parecía ser el de etiquetas y no el de incógnitas o variables; la x se estaba utilizando para denotar la cantidad de 450, en lugar de la variable: coste del cuaderno. La letra y se estaba usando para denotar la cantidad de 300 y no la variable coste de plumones. Mediante interacciones con la investigadora, orientadas hacia la comprensión de los significados de x e y en su relación escrita en la hoja electrónica, pero usando lápiz y papel, la pareja de estudiantes determinó que la expresión correcta era $450x + 300y$, donde x e y ahora parecían adquirir el significado de incógnitas o valores buscados. Pero no escribió la ecuación, es decir, no igualó a 6.600 la expresión (celda $C23$, tabla 7). Tampoco observó que faltara escribir otra condición (relacionada con «le costó el doble…»).

Discusión grupal

La discusión grupal se inició cuando varias parejas de estudiantes ya habían resuelto el problema y pasaron a exponer a sus compañeros su procedimiento de solución. La investigadora intervino durante las presentaciones para orientarlas hacia la identificación de incógnitas, cantidades conocidas y relaciones, con preguntas como: «¿Cuáles son las incógnitas en este problema?» o «¿Cómo se relacionan?».

Una vez identificadas las incógnitas, la investigadora reorientó la discusión hacia la identificación de las relaciones, las cuales fueron simbolizadas por el grupo en la pizarra. La participación de Alex y Fidel fue esencial en la discusión relacionada con la escritura del sistema de ecuaciones lineales que representaba la solución del problema, que fue escrito por el grupo como:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x}{2} \\ 450x + 300y = 6600 \end{cases}$$

Ambas ecuaciones fueron escritas sobre la base del trabajo de la hoja electrónica y no en el enunciado del problema.

A pesar de que la aportación del trabajo de la pareja (Alex y Fidel) había sido determinante para que el grupo identificara este sistema de ecuaciones, Alex tuvo dificultades con el concepto de ecuación y de solución de una ecuación, pues no reconoció $450x + 300y = 6.600$ como una de las ecuaciones del sistema que representa la solución del problema. Esto último fue abordado mediante entrevista, en la que se utilizó, además de hoja electrónica, lápiz y papel. Alex comprendió la relación $450x + 300y = 6.600$ a partir de su experiencia con la hoja electrónica, pero mostró dificultades para traducir la relación «el doble de» del lenguaje verbal al simbólico, usando lápiz y papel. Dificultad documentada en la literatura de investigación que presentan los estudiantes al resolver problemas verbales mediante la escritura y manipulación de ecuaciones lineales (*e.g.*, Matz, 1982). Alex estuvo ensayando, en ambiente de lápiz y papel, con expresiones como $x = y^2$, $y = 2x^2$, $y = x^2$, las cuales iba descartando al sustituir valores en ellas, hasta identificar $y + y = x$ como la otra relación buscada.

CONCLUSIONES Y REFLEXIONES FINALES

Las técnicas utilizadas para resolver los problemas 2, 3 y 4 por Alex y Fidel fueron: *tabla de valores, celda como variable y relación entre celdas de la misma fila, tomando una columna o varias de ellas como variables*.

Con estas técnicas, las parejas mostraban trabajo de rutina, como el vaciado de información inicial y el arrastre de fórmulas y cantidades, también evolución de su razonamiento algebraico, por ejemplo, el valor pragmático de la técnica *tabla de valores*. Mientras que su valor epistémico no permitía que los estudiantes lograran explicitar, usando la sintaxis de la hoja electrónica, las relaciones entre datos e incógnitas, tal como se observa en las ecuaciones lineales, escritas con lápiz y papel, que modelan la solución del problema. En cambio, las técnicas *relación entre celdas de la misma fila, tomando una columna o varias de ellas como variables, y celda como variable* sí permiten modelar la solución de los problemas, mediante sistemas de ecuaciones lineales escritos con la sintaxis de la hoja electrónica.

Las parejas de alumnos, tal y como se describe en los resultados mostrados en este documento, lograron interaccionar con «objetos simbólicos» (por ejemplo, = *D*2 + *D*3) al resolver los problemas en ambiente de hoja electrónica. Tales objetos pueden ser similares a los objetos algebraicos. Lo anterior es mencionado como parte del potencial de la hoja electrónica en la literatura de investigación (*e.g.*, Haspekian, 2005).

La pareja de estudiantes mostró al final del estudio un mejor manejo de la hoja electrónica y una mejor comprensión, en cuanto al proceso de identificación de incógnitas y variables en un problema y las relaciones entre estas. Los valores pragmático y epistémico de las técnicas se ven reflejados en los registros (trabajo con Excel) de los estudiantes y las discusiones en pareja y grupales. La técnica *relación entre celdas de la misma fila, tomando una columna o varias de ellas como variables* muestra cómo los estudiantes relacionaron los objetos simbólicos (tales como *D*2), considerándolos como incógnitas y variables. Además, la manera de relacionar los objetos simbólicos, usando esta técnica, propició la escritura del sistema de ecuaciones lineales que modela la solución del problema 4, usando lápiz y papel.

El desempeño de Alex y Fidel no fue lineal, como pudiera parecer de acuerdo con lo mostrado en este documento. Hubo avances y retrocesos durante el estudio en cada una de las etapas. El trabajo en pareja y las discusiones grupales fueron fundamentales para Alex y Fidel en cuanto a la evolución de su razonamiento algebraico, manifestado en la búsqueda de técnicas cada vez más sofisticadas para resolver los problemas.

Con el trabajo de Alex y Fidel se documentan las respuestas a las preguntas de investigación planteadas inicialmente en este artículo: «¿Qué técnicas emergen y evolucionan en la resolución de problemas algebraicos de tasa mediante el uso de la hoja electrónica?» o «¿Cuáles de ellas deben ser fomentadas, por su utilidad en la resolución de problemas, para propiciar formas de razonamiento algebraico en estudiantes de bachillerato?».

Las técnicas que emergieron en la resolución de problemas algebraicos de tasa, mediante el uso de la hoja electrónica, fueron: *tabla de valores, calculadora, fórmulas recursivas, ensayo numérico sistematizado, relación entre celdas de la misma fila, tomando una columna o varias de ellas como variables, y celda como variable*. De estas técnicas deben potenciarse las dos últimas, dado su valor epistémico, es decir, su utilidad para propiciar formas de razonamiento algebraico en los estudiantes, como la generalización y la expresión de esa generalidad, usando lenguajes cada vez más formales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AINLEY, J., BILLS, L. y WILSON, K. (2005). Designing spreadsheet-based tasks for purposeful algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 10, pp. 191-215.

ARTIGUE, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, pp. 245-274.

ARTIGUE, M. (2004). Problemas y Desafíos en Educación Matemática: ¿Qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática para afrontarlos? *Educación Matemática*, 16(3), pp. 5-28.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), pp. 221-266.

DETTORI, G., GARUTI, R. y LEMUT, E. (2001). *From Arithmetic to Algebraic Thinking by Using a Spreadsheet*. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell y R. Lins (eds.). *Perspectives on School Algebra*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publisher, pp. 191-208.

DRIJVERS, P. y TROUCHE, L. (2008). *From artifacts to instruments: a theoretical framework behind the orchestra metaphor*. En M. K. Heid y G. W. Blume (eds.). *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics* 2, pp. 363-392. Charlotte, NC: Information Age.

FRIEDLANDER, A. (1999). *Cognitive processes in a spreadsheet environment*. En O. Zaslavsky (ed.). *Proceedings of the 23th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* 2, pp. 337-344. Haifa, Israel.

GUIN, D. y TROUCHE, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculators, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3, pp. 195-227.

GUZMÁN, J., BEDNARZ, N. y HITT, F. (2003). *A theoretical model of analysis of rate problems in algebra*. En N. Pateman, B. Dougherty y J. Zilliox (eds.). *Proceedings of the 27th Annual Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education*, 3, pp. 9-15. Hawai'i, USA.

HASPEKIAN, A. (2005). An «Instrumental approach» to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: the case of spreadsheets. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 10, pp. 109-141.

MARTÍNEZ, M., STRUCK, F., PALMAS, O. y ÁLVAREZ, M. (2001). *Descubre y aprende, Matemáticas 3*. México: Prentice Hall.

MATZ, M. (1982). *Towards a process model for high school algebra errors*. En D. Seeman y J. S. Brown (eds.). *Intelligent Tutoring Systems*. Nueva York: Academic Press, pp. 25-50.

MOCHÓN, S., ROJANO, T. y URSINI, S. (2000). *Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo. Enseñanza de las matemáticas con Tecnología*. México: SEP.

PRECIADO, M. y TORAL, C. (1958). *Curso de matemáticas, Libro segundo*. México: Progreso.

RABARDEL, P. (1995). *Les hommes et les technologies: approche cognitive des instruments contemporains*. París: Armand Colin.

ROJANO, T. y SUTHERLAND, R. (1993). *Towards an Algebraic Approach: The Role of preadsheets*. En I. Hirabayashi, N. Nobuhiko, S. Keiichi y L. Fou-Lai (eds.). *Proceedings of the 17th Psychology of Mathematics Education Conference*, 1, pp. 189-196. Tsukuba, Japón.

SUTHERLAND, R. y ROJANO, T. (1993). A Spreadsheet Approach to Solving Algebra problems, *Journal of Mathematical Behavior*. 12, pp. 353-383.

TABACH, M. y FRIEDLANDER, A. (2004). Levels of student responses in a spreadsheetbased environment. En M. J. Hoines y A. B. Fuglestad (eds.). *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education*, 4, pp. 423-430. Bergen, Norway.

TABACH, M., HERSHKOWITZ, R. y SCHWARZ, B. (2006). *Constructing and consolidating of algebraic knowledge within dyadic processes: a case study. Educational studies in mathematics*, 63, pp. 235-258.

VERGNAUD, G. (1996): *La théorie de champs conceptuels*, en J. Brun (ed.): *Didactique des mathématiques*. Delachaux et Niestlé, 197-242.

VERILLON, P. y RABARDEL, P. (1995): «Cognition and Artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity», *European Journal of Psychology of Education* X(l), 77-101.

PRAGMATIC AND EPISTEMIC VALUE OF INSTRUMENTED TECHNIQUES IN SOLVING ALGEBRAIC WORD PROBLEMS IN AN ENVIRONMENT OF SPREADSHEET

Dra. Verónica Vargas-Alejo
División de Ciencias e Ingeniería, Universidad de Quintana Roo
Av. Boulevard Bahía s/n, Esq. Ignacio Comonfort. Col. Del Bosque, Chetumal, Quintana Roo, C.P. 77019
(vargasalejo@uqroo.mx)

Dr. José Guzmán-Hernández
Departamento de Matemática Educativa Cinvestav-IPN, México, DF. AV. IPN #2508, Col. San Pedro Zacatenco, CP. 07360
(jguzman@cinvestav.mx)

There is a trend to incorporate technologies of information and communication into the curricula and educational practices. The schools expect that the mathematic teachers use Internet and software as dynamic geometry, computer algebra software and Spreadsheets in the classroom. Current research recognizes the potential of the technologies for the teaching and learning of mathematics, in particular the learning of algebra. However there are processes that have been underestimated. One of them is the relationship between technical skills and conceptual development. Another one is the process in which an artifact becomes an instrument. Some current research assumes that the instrument involves techniques and schemes that the user develops while using the artifact. These techniques and schemes in turn guide the way in which the tool is used, also influence the development of thinking of the user.

The conceptual framework underpinning this research is known as Task-Technique-Theory (T-T-T) proposed by Artigue (2002). She uses the concepts of pragmatic and epistemic value to characterize the techniques that a user utilize in its interaction with an artifact to solve a situation. The focus of this paper is to document the pragmatic and epistemic values of the techniques that students used in their interaction with the Spreadsheet.It is shown how these techniques influenced the way that students used the Spreadsheet to solve algebra rate word problems and how the students' interaction with the artifact (Excel) allowed the emergence of new techniques, increasingly sophisticated, and theory which enabled them to explain the results obtained when the students solved the word problems. The research questions are: What type of techniques emerge and evolve during algebraic rate word problem solving in a Spreadsheet environment? Which techniques should be encouraged in the classroom to promote forms of algebraic reasoning in high school students?

The students who took part in this study were 15 years old. They were studying their course of algebra during the first semester of high school. They worked in pairs to solve rate word problems in an environment that involved exploration, finding patterns and relationships, making conjectures, generalization, formalization and justification of arguments. Results indicate that the use of the Spreadsheet can lead to forms of algebraic thinking as generalization and expression of that generality using increasingly formal languages.